

CENTRE D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Michel LEDUC

1ère Thèse : Dérivabilité dans les espaces normés.

2ème Thèse : Le problème des groupes de congruence.

Soutenues le 23 juin 1971 devant la commission d'examen

Messieurs	J.	DENY	Président
	G.	CHOQUET	
	J.P.	KAHANE	
	G.	POITOU	

Université de Paris-Sud

CENTRE D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Michel LEDUC

1ère Thèse : Dérivabilité dans les espaces normés.

2ème Thèse : Le problème des groupes de congruence.

Soutenues le 23 juin 1971 devant la commission d'examen

Messieurs	J. DENY	Président
	G. CHOQUET	
	J.P. KAHANE	
	G. POITOU	

Universiteit van Leiden

LIBRARY

MICROFILM



From the University of Leiden
Library of the Faculty of Science
Department of Botany

UNIV. LEIDEN
LIBRARY
DEPARTMENT OF BOTANY

Je dédie ces pages

à mon épouse

Pour commencer, je tiens à remercier:

Monsieur G. CHOQUET qui, après m'avoir donné le goût de l'analyse fonctionnelle, a accepté de devenir mon patron. Je dois beaucoup à son intuition, son dynamisme, sa compréhension et au séminaire qu'il anime avec chaleur. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissante admiration.

Monsieur J. P. KAHANE qui m'a accepté comme assistant plusieurs années, ce qui est fort enrichissant. Aux moments difficiles, il m'a aidé à me ressaisir en me confiant des travaux scientifiques et en m'invitant à exposer au Séminaire d'Analyse Harmonique. J'ai scrupule du souci que lui a causé cette thèse.

Monsieur G. POITOU dont le décanat m'a particulièrement marqué et qui m'a proposé mon second sujet.

Monsieur J. DENY qui m'a toujours témoigné une grande sollicitude et notamment à l'occasion de cette soutenance.

Mes anciens maîtres et tous les collègues, mathématiciens ou non, dont la sympathie, les conseils et les questions m'ont été et me resteront si précieux.

Madame PARVAN dont j'apprécie depuis longtemps la dactylographie, la compétence et la complaisance.

Orsay, le 28 mai 1971

SOMMAIRE

L'instabilité par composition de la différentiabilité faible en fait une notion peu utilisable en géométrie différentielle ; par contre son rôle en analyse fonctionnelle (analyse convexe notamment) est tout à fait fondamental. Cette thèse se propose d'approfondir notre connaissance des fonctions numériques faiblement différentiables et de détailler quelques unes de leurs applications.

La première moitié du présent travail explore ce qu'il advient quand on sort du cadre habituel (cas des fonctions convexes). La seconde s'y replace pour donner quelques résultats nouveaux ou démonstrations originales.

Un souci de concision a conduit à préférer l'expression "dérivable" à la terminologie pourtant beaucoup plus classique "différentiable au sens de Gateaux".

Le chapitre 0 précise les définitions et notations et en déduit des conséquences immédiates ; puis il procède à certains rappels et énonce plusieurs résultats généraux sans démonstration ni référence.

Le chapitre 1 montre que le théorème de densité de BISHOP-PHELPS [B] s'étend aux formes linéaires tangentes d'autres fonctions que les normes ; on en tire ensuite deux corollaires : le premier raffine le théorème de Hahn-Banach en répondant à un problème de séparation posé par G. CHOQUET [C], le second par une démonstration constructive simplifie l'obtention d'un résultat dû à WHITFIELD [W].

Le chapitre 2 obtient un théorème de densité du type de ceux d'ASPLUND [A"] concernant la densité du domaine de différentiabilité des fonctions convexes continues ; le cheminement radicalement différent (et très rapide) procure d'ailleurs un énoncé pour des fonctions et des espaces moins restreints ; il repose sur des propositions géométriques d'intérêt plus général que le théorème lui-même.

Le chapitre 3 expose l'extension aisée sinon brève de deux propriétés classiques : continuité des fonctions monotones dérivables définies sur certains espaces ordonnés (cf. [N], page 95, theorem 12, pour les fonctions linéaires positives), existence dans tout espace normé séparable de partitions de l'unité continues faiblement continûment dérivables (pour les espaces de Hilbert séparables, cf. [L], page 29, theorem 2).

Le chapitre 4 examine dans le cadre des espaces localement convexes, les relations entre la dérivabilité d'une fonction numérique et le comportement de sa conjuguée convexe ; les résultats obtenus viennent en complément de travaux de SMULIAN [S'] qui a exploré le cas plus élémentaire d'une norme, et en parallèle de travaux d'ASPLUND [A"] caractérisant la différentiabilité des fonctions convexes conjuguées.

Le chapitre 5 étudie les notions duales de norme uniformément dérivable et de norme faiblement uniformément convexe, récemment introduite par CUDIA [C'] ; en considérant le carré de telles normes on établit leur stabilité par produit cartésien ainsi que par moyenne convexe, complétant

ainsi une étude systématique entreprise par ASPLUND [A'] pour les types plus usuels d'uniforme convexité.

Le chapitre 6 présente de nouvelles démonstrations exploitant la dérivabilité, de quelques caractérisations la plupart déjà anciennes, des normes euclidiennes ; on commence par démontrer très rapidement le critère de FICKEN [F] dont on déduit deux corollaires faciles, puis un critère dû à JOICHI [J] d'où l'on tire enfin ceux de Blaschke et Birkhoff alors que Joichi les utilisait.

Le dernier chapitre propose quatre contre-exemples destinés à dissuader de simplifications ou généralisations qu'on pourrait envisager pour certaines démonstrations ou certains énoncés des chapitres précédents.

CHAPITRE 0

DEFINITIONS, NOTATIONS, RAPPELS.

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, E^* son dual algébrique et L une partie de E^* . f désigne une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$, non infinie partout, et on pose

$$\text{Rad}(f) = \{a \in E ; f(a) < \infty \text{ et } \forall x \in E, \exists r > 0 : f(a+rx) < \infty\}.$$

Définition : f est hémicontinue en $a \in E$, si $f(a) < \infty$ et si pour tout $x \in E$, $f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a+tx)$.

Définition : f est L -dérivable en $a \in E$, si $f(a) < \infty$ et s'il existe $\alpha \in L$ tel que pour tout $x \in E$, $\alpha(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(a+tx) - f(a))/t$.

D désigne l'ensemble des points de dérivabilité de f , f' désigne la fonction dérivée de D dans L et on note $f'(a).x$ la limite de $(f(a+tx) - f(a))/t$.

Remarque : si f est hémicontinue en a , alors $a \in \text{Rad}(f)$;

si f est E^* -dérivable en a , alors f est hémicontinue en a ;

si f est convexe, alors f est hémicontinue sur $\text{Rad}(f)$.

Quand E est topologique :

E' désigne son dual topologique, et on dit dérivable au lieu de E' -dérivable.

f^* désigne la fonction : $\alpha \in E' \rightarrow \sup\{\alpha(x) - f(x) ; x \in E\} \in]-\infty, +\infty]$ et

pour tout $a \in E$ on pose

$$\partial f(a) = \{\alpha \in E' ; \forall x \in E, \alpha(x-a) + f(a) \leq f(x)\}.$$

Remarque : pour tous $x \in E$ et $\alpha \in E'$, $\alpha(x) \leq f(x) + f^*(\alpha)$, $f^{**}(x) \leq f(x)$

et E admet une suite (x_n) vérifiant $f^*(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) - f(x_n)$.

Quand E est normé, ℓ désigne la fonction : $x \in E \rightarrow \|x\| \in [0, \infty[$;
 B et B' , S et S' désignent respectivement les boules fermées et sphères
de rayon 1 dans E et E' ; et pour tous $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$ on pose

$$B(a, r) = \{x \in E ; \|x - a\| < r\}.$$

(0.0) Proposition : soit f une fonction positivement homogène de E dans $]-\infty, +\infty]$; si f est dérivable en $a \in E$, alors $f'(a).a = f(a)$ et quel que soit $t > 0$, f admet $f'(a)$ pour dérivée en ta .

(0.1) Proposition : si f est positivement homogène, alors f^* est nulle sur la partie $\{\alpha \in E' ; \forall x \in E, \alpha(x) \leq f(x)\}$ et infinie en dehors.

(0.2) Proposition : si f est convexe, alors la partie $\text{Rad}(f)$ est convexe et pour tout $a \in \text{Rad}(f)$, la partie $\text{Rad}(f) - a$ est absorbante.

(0.3) Proposition : soient f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$, $a \in f^{-1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in E'$; si pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$f(a + rx) - f(a) - r\alpha(x) \leq \varepsilon r$$

alors f admet α pour dérivée en a .

(0.4) Proposition : soient deux fonctions f de E dans $\mathbb{R}$ et θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; si f est dérivable en $a \in E$ et si θ est dérivable en $f(a)$, alors $\theta \circ f$ admet $\theta'(f(a))f'(a)$ pour dérivée en a .

(0.5) Proposition : soient θ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, a et $x \in E$; si θ est dérivable en r et si f est dérivable en $a + \theta(r)x$, alors la fonction : $t \in \mathbb{R} \rightarrow f(a + \theta(t)x) \in]-\infty, +\infty]$ admet $\theta'(r)f'(a + \theta(r)x).x$ pour dérivée en r .

(0.6) Proposition : soient E normé, G un ouvert convexe de E , M un espace mesuré et g une fonction de $G \times M$ dans $]-\infty, +\infty]$; si pour presque tout $y \in M$ la fonction $x \in G \rightarrow g(x,y)$ est continûment dérivable, si pour tous $u \in E$, x et $x_0 \in G$ les fonctions $y \in M \rightarrow g(x,y)$, $g'(x,y).u$ et $\|g'(x,y) - g'(x_0,y)\|$ sont mesurables, s'il existe $a \in G$ tel que $\int |g(a,y)| dy < \infty$ et s'il existe $h \in \mathcal{L}^1(M)$ tel que pour presque tout $y \in M$, pour tout $x \in G$ $\|g'(x,y)\| \leq h(y)$, alors pour tout $x \in G$, $y \in M \rightarrow f(x,y)$ est intégrable et la fonction $x \in G \rightarrow \int g(x,y) dy$ est continûment dérivable.

(0.7) Proposition : une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sur le complémentaire d'une partie dénombrable admet une dérivée positive est croissante.

Corollaire : une fonction hémicontinue de E dans $\mathbb{R}$, qui sur le complémentaire d'une partie dénombrable admet une dérivée nulle est constante.

(0.8) Proposition : dans un espace vectoriel topologique, tout ouvert connexe est connexe par lignes brisées continues.

Corollaire : soient E vectoriel topologique et A un ouvert connexe de E ; si f est hémicontinue sur A , alors pour tous u et $v \in A$, il existe une fonction continue g de $[0,1]$ dans E vérifiant

$$u = g(0), \quad v = g(1) \quad \text{et} \quad f \circ g \text{ continue.}$$

(0.9) Proposition : soit G une partie bornée ouverte convexe de $\mathbb{R}^2$; si G est non vide, alors il existe $r \in \mathbb{R}$, une base $\{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$ et des fonctions θ convexe et θ_1 concave de $[r,r+1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\theta(r) = \theta_1(r), \quad \theta(r+1) = \theta_1(r+1)$$

et

$$\overline{G} \setminus G = \{tu + \theta(t)v ; t \in [r, r+1[\} \cup \{tu + \theta_1(t)v ; t \in]r, r+1] \}.$$

(0.10) Proposition : soient $n \in \mathbb{N}$, ℓ une norme sur $\mathbb{R}^n$ de norme duale λ et $(E_i)_{i \leq n}$ des espaces normés par les normes $(\ell_i)_{i \leq n}$ de duales $(\lambda_i)_{i \leq n}$ respectivement ; si ℓ est croissante sur le cône $\mathbb{R}_+^n$ muni de son ordre propre, alors la fonction : $(x_i) \in \prod E_i \rightarrow \ell((\ell_i(x_i))_{i \leq n}) \in [0, \infty[$ est une norme compatible avec la structure produit ; si de plus pour tout $(r_i) \in \mathbb{R}_+^n$ il existe $(t_i) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\lambda((r_i)_{i \leq n}) = \sum_{i \leq n} t_i r_i$ et $\ell((t_i)_{i \leq n}) = 1$, alors la fonction : $(\alpha_i) \in \prod E_i' \cong (\prod E_i)' \rightarrow \lambda((\lambda_i(\alpha_i))_{i \leq n}) \in [0, \infty[$ est la norme duale de la précédente.

Remarque : c'est le cas pour les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

Bishop et Phelps ont établi que les formes linéaires d'appui à un convexe fermé borné d'un espace de Banach sont denses dans le dual.
 Les théorèmes (1.2) et (1.4) s'apparentent à ce résultat ;
 la proposition (1.8) est indépendante des précédentes.

On suppose E normé.

(1.0) Lemme.— Soient $\alpha \in E'$ et A une partie complète non vide de E ; si α est majorée sur A , alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que

$$(x \in E \text{ et } 0 < \varepsilon \|x\| \leq \alpha(x)) \implies (\forall t > 0, (a+tx) \notin A).$$

Cf. [B], page 28, lemma 1.

(1.1) Lemme.— Soient $\varepsilon > 0$, α et $\beta \in S'$; si pour tout $x \in \bar{\beta}^1(0)$, $\alpha(x) \leq \varepsilon \|x\|/2$, alors $\varepsilon \geq \min\{\|\alpha - \beta\|, \|\alpha + \beta\|\}$.

Cf. [P], page 978, lemma 3.1.

(1.2) THEOREME.— Soient E un espace normé, f une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$, et $r \in \mathbb{R} \cap f(E)$; si $\bar{f}^1(]-\infty, r])$ est borné complet, si f est hémicontinue sur $\bar{f}^1(]-\infty, r[)$, dérivable sur $\bar{f}^1(r)$ et si pour tout $x \in \bar{f}^1(r)$, $f'(x) \neq 0$, alors pour tous $\alpha \in S'$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \bar{f}^1(r)$ tel que

$$\left\| \alpha - \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|} \right\| \leq \varepsilon.$$

En effet : supposons $\varepsilon > 1$,

d'après le lemme (1.0), il existe $a \in \bar{f}^1(]-\infty, r])$ tel que

$$(x \in E \text{ et } 0 < \varepsilon \|x\|/2 \leq \alpha(x)) \implies (\forall t > 0, f(a+tx) > r).$$

Comme $\varepsilon < \|\alpha\|$, il existe $u \in S$ tel que $\alpha(u) > \varepsilon$, d'où $\alpha(u) \geq \varepsilon \|u\|/2 > 0$;

en conséquence pour tout $t > 0$, $f(a+tu) > r$, donc par hémicontinuité de f

$$f(a) = \lim_{t \downarrow 0} f(a+tu) \geq r, \text{ d'où } f(a) = r.$$

Comme $f'(a) \neq 0$, il existe $v \in S$ tel que $f'(a).v < 0$; en conséquence

pour tous $x \in \text{Ker } f'(a)$ et $t > 0$, $f'(a) \cdot (x+tv) < 0$, donc

$\alpha(x+tv) < \varepsilon \|x+tv\|/2$ car

$$(y \in E \text{ et } \alpha(y) \geq \varepsilon \|y\|/2) \Rightarrow f'(a) \cdot y = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+ty) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Finalement pour tout $x \in \text{Ker } f'(a)$, $\alpha(x) = \lim_{t \downarrow 0} \alpha(x+tv) \leq \lim_{t \downarrow 0} \varepsilon \|x+tv\|/2 = \varepsilon \|x\|/2$

et comme $\alpha(u) + \frac{f'(a) \cdot u}{\|f'(a)\|} > \varepsilon$ le lemme (1.1) permet de conclure.

(1.3) Remarque : il suffit sur $\bar{f}^1([-\infty, r[)$ de f hémi-s.c.s. au lieu de f hémi-continue.

(1.4) THEOREME.- Soient E un espace normé, f une fonction hémicontinue de E dans $\mathbb{R}$ et $r \in f(E)$; si $\bar{f}^1(r)$ est borné complet, si f est dérivable sur $\bar{f}^1(r)$ et si pour tout $x \in \bar{f}^1(r)$, $f'(x) \neq 0$, alors pour tous $\alpha \in S'$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \bar{f}^1(r)$ tel que $\|\alpha - \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}\| \leq \varepsilon$.

En effet :

d'après le lemme (1.0), il existe $a \in \bar{f}^1(r)$ tel que

$$(x \in E \text{ et } 0 < \varepsilon \|x\|/2 \leq \alpha(x)) \Rightarrow (\forall t > 0, f(a+tx) \neq r).$$

Or en fait, $f-r$ garde un signe constant sur le convexe

$$\{a+x ; x \in E \text{ et } 0 < \varepsilon \|x\|/2 \leq \alpha(x)\}$$

car l'image hémicontinue d'un convexe est connexe par arcs.

Ceci permet de poursuivre la démonstration comme en (1.2).

(1.5) Remarque : on peut aisément prouver que $\bar{f}^1([-\infty, r])$ ou $\bar{f}^1([r, +\infty[)$ est borné et fermé ; ainsi pour un espace de Banach, (1.4) apparaît comme un corollaire du théorème (1.2)

(1.6) Corollaire.- Soient E de Banach et f de E dans $\mathbb{R}$, positivement

homogène, dérivable sur $\bar{f}^1(1)$ et continue ; si $\bar{f}^1(1)$ est borné non vide, alors pour tout convexe compact K ne contenant pas l'origine, il existe $r_1, \dots, r_n > 0$ et $a \in \bar{f}^1(1)$ tel que $K \subset \bigcup_{i \leq n} (\bar{f}^1(]-\infty, r_i[) - r_i a)$.

En effet :

d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\alpha \in S'$ tel que $0 < \min \alpha(K)$;

puis par continuité de α/l sur le compact K , $0 < \min \left\{ \frac{\alpha(x)}{\|x\|} ; x \in K \right\}$.

Par positive homogénéité de f , pour tout $x \in \bar{f}^1(1)$, $f'(x).x = f(x) \neq 0$,

donc d'après le théorème (1.4), il existe $a \in \bar{f}^1(1)$ tel que

$$\left\| \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|} + \alpha \right\| < \min_{x \in K} \frac{\alpha(x)}{\|x\|}$$

donc pour tout $x \in K$, $\frac{f'(a).x}{\|f'(a)\|} + \alpha(x) < \frac{\alpha(x)}{\|x\|}$ d'où $f'(a).x < 0$.

En conséquence pour tout $x \in K$, il existe $t > 0$ tel que $f(a+tx) - f(a) < 0$

d'où $x \in \bar{f}^1(]-\infty, 1/t[) - a/t$, donc $K \subset \bigcup_{r>0} \bar{f}^1(]-\infty, r[) - ra$.

la compacité de K permet de conclure.

(1.7) Remarque : en outre si f est une norme, alors il existe $a \in S$ et $r > 0$ vérifiant : $K \subset B(ra, r)$.

(1.8) Proposition.- Si E normé admet une fonction continûment dérivable, non nulle et à support borné, alors E admet une fonction numérique f positivement homogène, continûment dérivable sur $E \setminus \{0\}$ et telle que $\bar{f}^1([0, 1])$ est un voisinage borné symétrique de l'origine.

En effet :

on peut supposer, en composant éventuellement $1 - e^{-g^2}$ par une translation, que la fonction g de l'hypothèse vérifie : $0 \leq g < 1$ et $g(0) > 0$.

Considérons la fonction $f : x \in E \rightarrow \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(tx) dt} \in [0, \infty[$; trivialement,

f est symétrique, positivement homogène et $f(0) = 0$.

Comme le support de g est borné, il existe $s \in]0, \infty[$ tel que pour tout

$x \in E \setminus \{0\}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(tx) dt = \int_{-s/\|x\|}^{s/\|x\|} g(tx) dt \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{f(x)} < \int_{-s/\|x\|}^{s/\|x\|} dt = \frac{2s}{\|x\|}$$

donc $\bar{f}^1([0, 1]) \subset B(0, 2s)$;

et puisque g est continue et que $g(0) > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$\forall x \in B(0, r), g(x) > g(0)/2$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} g(tx) dt \geq \int_{-1}^1 g(0)/2 = g(0)$ donc $B(0, rg(0)) \subset \bar{f}^1([0, 1])$.

Pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, g' étant continue l'est uniformément sur le segment

compact $[-\frac{2s}{\|a\|} a, \frac{2s}{\|a\|} a]$ donc il existe $\varepsilon \in]0, s]$ tel que

$$\forall t \in [-\frac{2s}{\|a\|}, \frac{2s}{\|a\|}] \quad \text{et} \quad y \in B(ta, \varepsilon), \quad \|g'(y) - g'(ta)\| \leq 1$$

donc pour tout $x \in B(a, \frac{\varepsilon\|a\|}{2s})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|tg'(tx)\| \leq |t| (1 + \|g'(ta)\|) \mathbf{1}_{[-\frac{2s}{\|a\|}, \frac{2s}{\|a\|}]}^{(t)}$$

et la proposition (0.6) permet de conclure que f est continûment dérivable sur $E \setminus \{0\}$.

(1.9) Corollaire.- Si E de Banach admet une fonction numérique continûment dérivable et à support borné non vide, alors toute partie dense de S admet une image continue dense dans S' .

En effet :

considérons la jauge f associée par la proposition (1.8) ; par continuité

$\bar{f}^1(1)$ est fermé donc complet et par positive homogénéité pour tout

$$x \in \bar{f}^1(]0, \infty[)$$

$$f'(x).x = f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad f'(tx) = f'(x).$$

D'après le théorème (1.4), l'ensemble $\left\{ \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} ; x \in \bar{f}^1(1) \right\}$ est donc

dense dans S' .

L'égalité $\left\{ \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} ; x \in \bar{f}^1(1) \right\} = \left\{ \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} ; x \in S \right\}$ et la continuité

de la fonction : $x \in S \rightarrow \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} \in S'$ permettent de conclure.

(1.10) Remarque : dense dans S' implique total dans E' .

CHAPITRE 2

Asplund, en utilisant le caractère localement lipschitzien des fonctions convexes continues, a obtenu les énoncés (2.8) et (2.9) dans le cas des espaces de Banach ; l'idée directrice de notre nouvelle démonstration apparaît à la proposition (2.1).

On suppose E normé

(2.0) Lemme. - Soient x et $u \in E$, r et $t > 0$, si $B(u, t) \subset B(x, r)$, alors

$$\forall \varepsilon \in [0, \|x-u\|[, B(u + \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|}, t+\varepsilon) \subset B(x, r) \cap B(u, t+2\varepsilon).$$

En effet : si $u \neq x$

$$\text{de } x + \frac{r(u-x)}{\|u-x\|} \notin B(x, r) \text{ on déduit } t \leq \left\| \frac{r(u-x)}{\|x-u\|} + x-u \right\| \text{ donc } t \leq |r - \|x-u\||$$

d'où $t + \|x-u\| \leq r$.

Or par inégalité triangulaire, pour tout $v \in B(u + \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|}, t+\varepsilon)$

$$\|x-v\| \leq \|x-u - \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|}\| + \|u + \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|} - v\|$$

$$< | \|x-u\| - \varepsilon | + t + \varepsilon = \|x-u\| + t \leq r$$

et

$$\|v-u\| \leq \|v-u - \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|}\| + \left\| \frac{\varepsilon(x-u)}{\|x-u\|} \right\| < t + \varepsilon + \varepsilon = t + 2\varepsilon.$$

(2.1) Proposition. - Soient $\varepsilon > 0$, G un ouvert de E et F une partie de $\overline{G} \setminus G$;

si $(u \in G, t > 0 \text{ et } F \cap B(u, t) = \emptyset) \implies B(u, t) \subset G$ alors la partie

$$G_\varepsilon = \{a \in F ; \exists u \in G \text{ et } t > 0 : B(u, t) \subset G \text{ et } \|a-u\| < (1+\varepsilon)t\}$$

est un ouvert partout dense de F .

En effet :

G_ε est ouvert dans F puisque réunion des ouverts $F \cap B(u, (1+\varepsilon)t)$ prise

sur l'ensemble $\{(u, t) \in E \times]0, \infty[; B(u, t) \subset G\}$.

G_ε est dense dans F car pour tous $x \in F$ et $r > 0$ posons $r_1 = \frac{2r}{3+\varepsilon}$,

$$T = \{t > 0 ; \exists u \in E : B(u, t) \subset G \cap B(x, r_1)\}$$

et $s = \sup T$. Comme G est ouvert, T est non vide puisque $x \in \bar{G}$;
 en outre $T \subset]0, r_1/2]$ puisque $x \notin G$; ainsi $s \in]0, r_1/2]$ donc il existe
 $u \in G$ et $t > \frac{s}{1+\varepsilon/2}$ vérifiant : $B(u, t) \subset G \cap B(x, r_1)$.

En conséquence il existe $a \in F \cap B(u, (1+\varepsilon)t)$, sinon

d'après l'hypothèse $B(u, (1+\varepsilon)t) \subset G$, puis comme $0 < \varepsilon t/2 < (1+\varepsilon)t < \|x-u\|$,

d'après le lemme (2.0) il existe $v \in E$ tel que

$$B(v, (1+\varepsilon/2)t) \subset B(x, r_1) \cap B(u, (1+\varepsilon)t) \subset G \cap B(x, r_1)$$

contradictoire avec $s < (1+\varepsilon/2)t$.

Finalement $a \in G_\varepsilon$ et

$$\|x-a\| \leq \|x-u\| + \|u-a\| < r_1 + (1+\varepsilon)t \leq r_1 + (1+\varepsilon)r_1/2 = r.$$

(2.2) Lemme.— Soient f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, A un ouvert connexe de $E \times \mathbb{R}$

$$G = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) < t\}$$

et

$$F = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} ; f(x) = t\} ;$$

si f est hémicontinue, alors $(G \cap A \neq \emptyset \text{ et } F \cap A = \emptyset) \Rightarrow A \subset G$.

En effet :

supposons $G \cap A \neq \emptyset$ et $A \not\subset G$, puis choisissons $(u, r) \in A \cap G$ et

$(v, s) \in A \setminus G$; d'après la proposition (0.8), il existe une fonction continue

(g, θ) de $[0, 1]$ dans A vérifiant :

$$g(0) = u, \quad \theta(0) = r, \quad g(1) = v, \quad \theta(1) = s \quad \text{et} \quad f \circ g \text{ continue.}$$

La fonction $(f \circ g - \theta)$ est continue, or $f(u) - r < 0$ et $f(v) - s \geq 0$,

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in]0, 1[$

tel que $f(g(t)) - \theta(t) = 0$ d'où $(\theta(t), g(t)) \in F \cap A$.

(2.3) Lemme.— Soient $\varepsilon > 0$, a et $u \in E$, α et $\beta \in E' \setminus \{0\}$; si $a \neq u$ et si pour tout $x \in B(u, \frac{\|a-u\|}{1+\varepsilon})$, $\alpha(x) \leq \alpha(a)$ et $\beta(x) \leq \beta(a)$, alors

$$\left\| \frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \frac{\beta}{\|\beta\|} \right\| \geq \frac{2}{1+\varepsilon} .$$

En effet :

$$\|\alpha\| \leq (1+\varepsilon) \frac{\alpha(a-u)}{\|a-u\|} \quad \text{et de même} \quad \|\beta\| \leq (1+\varepsilon) \frac{\beta(a-u)}{\|a-u\|} \quad \text{puisque pour tout}$$

$$x \in B(0, \frac{\|a-u\|}{1+\varepsilon}), \quad \alpha(u+x) \leq \alpha(a) \quad \text{d'où} \quad \alpha(x) \leq \alpha(a-u).$$

Donc

$$\frac{2}{1+\varepsilon} \leq \frac{\alpha(a-u)}{\|\alpha\| \|a-u\|} + \frac{\beta(a-u)}{\|\beta\| \|a-u\|} = \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \frac{\beta}{\|\beta\|} \right) \cdot \frac{a-u}{\|a-u\|} \leq \left\| \frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \frac{\beta}{\|\beta\|} \right\| .$$

(2.4) Définition.— La norme de E est strictement convexe si

$$(u \in S, v \in S \text{ et } 2 \leq \|u+v\|) \Rightarrow u = v .$$

(2.5) Remarque : cette définition équivaut (cf. remarque 5.0) à

$$(u \text{ et } v \in E, 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u+v\|^2) \Rightarrow u = v$$

en particulier si la norme duale sur E' est strictement convexe, alors

$$(\text{cf. proposition 0.10}) \text{ la norme duale : } (\alpha, r) \in (E \times \mathbb{R})' \rightarrow \sqrt{\|\alpha\|^2 + r^2} \in [0, \infty[$$

est convexe strictement.

(2.6) THEOREME.— Soient E un espace normé de norme duale strictement convexe et f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$; si E est de Baire, alors la partie $\{a \in E ; 1 \geq \text{card } \partial f(a)\}$ contient un G_δ dense de E .

En effet :

définissons F et G comme au lemme (2.2) ; trivialement $F \subset \bar{G} \setminus G$ puis

comme f est continue, G est ouvert dans $E \times \mathbb{R}$ et F canoniquement

homéomorphe à E donc de Baire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons G_n défini comme G_ε à la proposition (2.4)

avec $\varepsilon = 1/n$; G_n est un ouvert partout dense de F , donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ un

G_δ dense de F .

Or, pour tout $(a, f(a)) \in G_n$, il existe $u \in G$ tel que dans $E \times \mathbb{R}$

$$B(u, \frac{\|(a, f(a)) - u\|}{1+1/n}) \subset G$$

donc pour tous $\alpha \in \partial f(a)$ et $(x, t) \in B(u, \frac{\|(a, f(a)) - u\|}{1+1/n})$

$$\alpha(x-a) + f(a) \leq f(x) \leq t \text{ d'où } (\alpha, -1) \cdot (x, t) < (\alpha, -1) \cdot (a, f(a)).$$

Finalement quand $(a, f(a)) \in \bigcap G_n$, pour tous α et $\beta \in \partial f(a)$

d'après le lemme (2.3) pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{(\alpha, -1)}{\|(\alpha, -1)\|} \right\| + \left\| \frac{(\beta, -1)}{\|(\beta, -1)\|} \right\| \geq \frac{2}{1+1/n}$$

or $2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n/(n+1))$, donc d'après la remarque (2.5)

$$\frac{(\beta, -1)}{\|(\beta, -1)\|} = \frac{(\alpha, -1)}{\|(\alpha, -1)\|} \text{ d'où } \beta = \alpha.$$

(2.7) Remarque : on peut "localiser" le théorème (2.6), en supposant f définie

seulement sur un ouvert connexe A de E et en remplaçant $\partial f(a)$ par

$$\{\alpha \in E' ; \exists r > 0 : \forall x \in B(a, r), \alpha(x-a) \leq f(x) - f(a)\} ;$$

le G_δ obtenu n'est alors dense que dans A .

Ainsi en considérant $+f$ puis $-f$, on obtient que l'ensemble des points

"anguleux" d'une fonction numérique continue est inclus dans un F_σ rare.

(2.8) Corollaire.- Si E de Baire admet une norme duale strictement convexe, alors

le domaine de dérivabilité de toute fonction convexe continue de E dans $\mathbb{R}$

contient un G_δ dense de E .

Conséquence immédiate du théorème (2.6) et de la proposition (4.1.1).

(2.9) Remarque : la proposition (2.1) et le corollaire (2.8) permettent de prouver que : si E de Baire admet une norme de duale localement uniformément convexe, alors le domaine de différentiabilité de toute fonction convexe continue de E dans $\mathbb{R}$ est un G_δ dense de E .

Les résultats suivants sont obtenus en adaptant des démonstrations déjà anciennes, dont une est du reste défectueuse ([L], page 29, theorem 2).

(3.0) Lemme.- Soit E un espace vectoriel topologique métrisable de Baire, ordonné par un cône complet P ; si $E = P - P$, alors pour tout voisinage V de l'origine, $(V \cap P - V \cap P)$ est aussi un voisinage de l'origine.

Cf. [S], page 221, lemma 2.

(3.1) THEOREME.- Soit E un espace localement convexe ordonné par un cône P ; si E est de Baire et métrisable, si P est complet et si $E = P - P$, alors toute fonction monotone de E dans R hémicontinue en un point est continue en ce point.

En effet :

choisissons une base dénombrable (V_n) de voisinages convexes de l'origine

vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 V_n \subset V_{n-1}$

d'après le lemme (3.0) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(V_n \cap P - V_n \cap P)$ est un voisinage de l'origine.

Supposons la fonction f de E dans R discontinue en $a \in E$ et crois-

sante ; il existe $\varepsilon > 0$ et des suites (u_n) et (v_n) dans P vérifiant :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ et $v_n \in V_n \cap P$ et, par exemple, $f(a+v_n-u_n) \leq f(a) - \varepsilon$.

Or pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q > p$

$$\sum_{m=1}^{q-p} (4/3)^m u_{p+m} \in \sum_{m=1}^{q-p} (2/3)^m V_p \subset 2 V_p$$

puisque pour tout $m \in \mathbb{N}$, $2^m V_{p+m} \subset V_p$; en conséquence

$$\sum_{p < n \leq q} (4/3)^n u_n \in (4/3)^p 2 V_p \subset 2^{p/2} 2 V_p \subset V_{[-1+p/2]},$$

donc dans P la série $((4/3)^n u_n)$ converge puisque $\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} [-1 + p/2]$

et que P est complet ; notons u sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P contient $u - (4/3)^n u_n$ donc aussi

$$a + v_n - u_n - (a - (3/4)^n u), \text{ d'où } f(a - (3/4)^n u) \leq f(a + v_n - u_n) \leq f(a) - \varepsilon$$

et f n'est pas hémicontinue en a .

(3.2) Corollaire. Soient E un espace localement convexe ordonné par un cône P et P^* la partie $\{\alpha \in E^* ; \forall x \in P, \alpha(x) \geq 0\}$; si E est métrisable et de Baire, si P est complet et si $E = P - P$, alors toute fonction hémicontinue de E dans $\mathbb{R}$, P^* -dérivable sur le complémentaire d'une partie dénombrable de E , est croissante et continue.

En effet : soit f une telle fonction,

pour tous $a \in E$ et $x \in P$, la fonction continue : $t \in \mathbb{R} \rightarrow f(a+tx) \in \mathbb{R}$

admet $f'(a+tx).x \geq 0$ pour dérivée sur le complémentaire d'un dénombrable ;

elle est donc croissante, d'où en particulier $f(a+x) \geq f(a)$.

Le théorème (3.1) permet de conclure.

(3.3) Remarque : il suffit de : P^* -dérivable sur le complémentaire d'une partie de E coupant toute droite affine suivant un ensemble dénombrable.

(3.4) Lemme. Soient M un espace métrique et (x_n, r_n) une suite dans $M \times \mathbb{R}$; si $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_n)$, alors les ouverts $B(x_n, r_n) \setminus \bigcup_{p < n} \bar{B}(x_p, r_p - 1/n)$ forment un recouvrement localement fini de M .

Cf. [L'], page 228, lemme 9.

(3.5) Lemme. Soient E un espace normé, (x_n, r_n) une suite dans $E \times \mathbb{R}$ et (G_n) la suite des ouverts considérés au lemme (3.4) ; si la norme est dérivable,

alors il existe une suite (f_n) de fonctions positives continues dérivables
sur E , vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, G_n = f_n^{-1}(]0, \infty[)$.

En effet :

quand $r_n \leq 0$, c'est trivial ; sinon, notons A la partie finie

$$\{p \in \mathbb{N} ; p < n \text{ et } r_p \geq 1/n\}$$

et choisissons $\theta \in \mathcal{C}_+^\infty(\mathbb{R})$ tel que $]1, \infty[= \theta^{-1}(0)$, par exemple

$$t \rightarrow 1]_{-\infty, 1}[(t) e^{1/(t-1)}.$$

La fonction $f_n : x \in E \rightarrow \theta\left(\frac{\|x-x_n\|^2}{r_n^2}\right) \prod_{p \in A} \theta\left(2 - \frac{\|x-x_p\|^2}{(r_p - 1/n)^2}\right) \in \mathbb{R}$

est positive, continue et dérivable.

En outre $x \in \bar{f}^{-1}(]0, \infty[)$ équivaut à :

$$\theta\left(\frac{\|x-x_n\|^2}{r_n^2}\right) > 0 \text{ et } \forall p \in A, \theta\left(2 - \frac{\|x-x_p\|^2}{(r_p - 1/n)^2}\right) > 0$$

équivalent à :

$$\|x-x_n\| < r_n \text{ et } \forall p < n, \|x-x_p\| > r_p - 1/n.$$

(3.6) Proposition.- Tout espace normé séparable admet une norme équivalente déri-
vable (sauf à l'origine, bien entendu).

Cf. [A], page 38, theorem 3.

(3.7) THEOREME.- Soient E un espace normé séparable, F un fermé et G un
ouvert de E ; si $F \subset G$, alors il existe une fonction f continue et
dérivable de E sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $0 \leq f \leq 1$, $f|_F = 1$ et $f|_{E \setminus G} = 0$.

En effet :

choisissons une suite (u_n) dense dans E et posons pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$x_{2p-1} = x_{2p} = u_p,$$

$$r_{2p} = \max\{r \in \mathbb{R} ; B(u_p, r) \subset G\} \text{ et } r_{2p-1} = \max\{r \in \mathbb{R} ; B(u_p, r) \subset E \setminus F\} ;$$

$$\text{immédiatement } E = G \cup (E \setminus F) = \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}} B(x_n, r_n) \cup \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}-1} B(x_n, r_n).$$

Considérons le recouvrement ouvert (G_n) localement fini et la suite (f_n) de fonctions positives continues dérivables associés par les lemmes (3.4) et (3.5) ; pour tout $x \in E$, $0 < \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ puisque $(G_n)_{\mathbb{N}}$ recouvre E .

Comme la famille $(G_n)_{\mathbb{N}}$ est localement finie, pour tout $a \in E = \bigcup_n G_n$ il existe un voisinage V de a et une partie finie A de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall x \in V \text{ et } n \in \mathbb{N} \setminus A, f_n(x) = 0 ;$$

ainsi sur V , $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n \in 2\mathbb{N}} f_n$ égalent respectivement $\sum_{n \in A} f_n$ et

$\sum_{n \in A \cap 2\mathbb{N}} f_n$; ces fonctions sont donc continues et dérivables et donc aussi

la fonction

$$f = \frac{\sum_{n \in 2\mathbb{N}} f_n}{\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n}.$$

Or $0 \leq f \leq 1$ puisque $0 \leq \sum_{n \in 2\mathbb{N}} f_n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$;

pour tous $x \in F$ et $n \in (2\mathbb{N}-1)$, $B(x_n, r_n) \subset E \setminus F$ donc $x \notin G_n$ d'où $f_n(x) = 0$

puis

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} f_n(x) \text{ d'où } f(x) = 1 ;$$

enfin pour tous $x \in E \setminus G$ et $n \in 2\mathbb{N}$, $B(x_n, r_n) \subset G$ donc $x \notin G_n$ d'où

$$f_n(x) = 0 \text{ et } 0 = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} f_n(x) = f(x).$$

(3.8) Corollaire.- Pour tout recouvrement ouvert d'un espace normé séparable,

il existe une partition de l'unité continue et dérivable, subordonnée à ce recouvrement.

Démonstration analogue à [L'], page 230, proposition 12.

(3.9) Remarque : les partitions de l'unité obtenues sont en fait comme la norme

(cf. [L"], page 6, théorème 4) dérivables continûment de E normé dans

E' faible.

Une construction différente de Bonic et Frampton [B' et B''] fournit le même résultat.

DERIVABILITE DES FONCTIONS CONVEXES CONJUGUEES.

On suppose E seulement vectoriel topologique.

(4.0) Remarque : si la fonction f de E dans $]-\infty, +\infty]$ est convexe, alors pour tous $a \in \bar{f}^{-1}(\mathbb{R})$ et $x \in E$, la fonction

$$t \in]0, \infty[\rightarrow \frac{f(a+tx) + f(a-tx) - 2f(a)}{t} \in [0, \infty]$$

est positive croissante.

(4.1) Proposition.- Soient f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$ et $a \in \bar{f}^{-1}(\mathbb{R})$; si f est continue en a , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(4.1.0) f est dérivable en a ,

(4.1.1) $1 \geq \text{card } \partial f(a)$,

(4.1.2) $\forall \varepsilon > 0$ et $x \in E$, $\exists r > 0 : f(a+rx) + f(a-rx) - 2f(a) \leq \varepsilon r$

(4.1.3) $\{x \in E ; 0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+tx) + f(a-tx) - 2f(a)}{t}\}$ est total.

Cf. [L"], page 5, proposition 1.

(4.2) Proposition.- Soient $a \in E$ et f une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$; si f est dérivable en a , alors pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que

$$(\alpha \in E' \text{ et } f^*(\alpha) + f(a) - \alpha(a) < r) \Rightarrow |\alpha(x) - f'(a).x| < \varepsilon.$$

En effet :

comme f est dérivable en a , il existe $s > 0$ tel que pour tout $t \in [-s, s]$

$$|f(a+tx) - f(a) - tf'(a).x| \leq \varepsilon |t|/2$$

donc pour tout $\alpha \in E'$ tel que $f^*(\alpha) + f(a) - \alpha(a) < \varepsilon s/2$,

$$t(\alpha(x) - f'(a).x) = \alpha(a+tx) - \alpha(a) - tf'(a).x$$

$$< f'(a+tx) - f'(a) - \alpha(a) - tf'(a).x$$

$$< f(a+tx) + \varepsilon s/2 - f(a) - tf'(a).x < \varepsilon s/2 + \varepsilon |t|/2 < \varepsilon s.$$

On conclut en prenant $t = +$ puis $-s$.

(4.3) Corollaire.— Si f^* est dérivable en $\alpha \in E'$, alors pour tous $\varepsilon > 0$ et $\beta \in E'$, il existe $r > 0$ tel que

$$(x \in E \text{ et } f(x) + f^*(\alpha) - \alpha(x) < r) \Rightarrow |\beta(x) - (f^*)'(\alpha).\beta| < \varepsilon.$$

En effet :

d'après la proposition (4.2) il existe $r > 0$ tel que :

$$(u \in E'' \text{ et } f^{**}(u) + f^*(\alpha) - u(\alpha) < r) \Rightarrow |u(\beta) - (f^*)'(\alpha).\beta| < \varepsilon.$$

Or pour tout $x \in E$, $f^{**}(x) \leq f(x)$ donc

$$f(x) + f^*(\alpha) - \alpha(x) < r \Rightarrow f^{**}(x) + f^*(\alpha) - \alpha(x) < r \Rightarrow |\beta(x) - (f^*)'(\alpha).\beta| < \varepsilon.$$

(4.4) Corollaire.— Si f^* admet $a \in E$ pour dérivée en $\alpha \in E'$ et si f est faiblement semi-continue inférieurement en a , alors $\alpha(a) = f(a) + f^*(\alpha)$.

En effet :

par définition E admet une suite (x_n) vérifiant $f^*(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) - f(x_n) / \infty$;

d'après le corollaire (4.3) pour tout $\beta \in E'$, $\beta(a) = (f^*)'(\alpha).\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(x_n)$;

en particulier $\alpha(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n)$ d'où $\alpha(a) - f^*(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Or $f(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ puisque f est faiblement s.c.i. en a , donc

$$f(a) \leq \alpha(a) - f^*(\alpha) \text{ d'où } \alpha(a) \geq f(a) + f^*(\alpha)$$

et l'inégalité canonique $\alpha(a) \leq f(a) + f^*(\alpha)$ permet de conclure.

(4.5) Lemme.— Pour tous $r > 0$ et $a \in \text{Rad}(f)$, la partie

$\{\alpha \in E' ; f^*(\alpha) + f(a) - \alpha(a) \leq r\}$ est bornée faiblement.

En effet :

pour tout $x \in E$, comme $a \in \text{Rad}(f)$ il existe $s > 0$ tel que $f(a+sx) < \infty$

donc pour tout $\alpha \in E'$ tel que $f^*(\alpha) + f(a) - \alpha(a) \leq r$

$$s\alpha(x) = \alpha(a+sx) - \alpha(a) \leq f(a+sx) + f^*(\alpha) - \alpha(a) \leq f(a+sx) + r - f(a)$$

d'où $\alpha(x) \leq (f(a+sx) - f(a) + r)/s < \infty$.

(4.6) Lemme.- Soient E un espace localement convexe, f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$ et $a \in f^{-1}(\mathbb{R})$; si f est s.c.i. en a , alors

$$f(a) = \sup\{\alpha(a) - f^*(\alpha) ; \alpha \in E'\}.$$

En effet :

pour tout $\varepsilon > 0$, comme f est s.c.i. en a et E localement convexe,

il existe un ouvert convexe G de E tel que $a \in G$ et pour tout $x \in G$,

$f(x) \geq f(a) - \varepsilon/2$; l'épigraphe convexe $\{(x, t) \in E \times \mathbb{R} ; t \geq f(x)\}$ est

donc disjoint de l'ouvert convexe $G \times]-\infty, f(a) - \varepsilon/2[$, et d'après le théo-

rème de Hahn-Banach, il existe $(\alpha, r) \in E' \times \mathbb{R}$ qui les sépare strictement

d'où

$$\forall x \in f^{-1}(\mathbb{R}), \alpha(x) + rf(x) > \alpha(a) + r(f(a) - \varepsilon)$$

en particulier $\alpha(a) + rf(a) > \alpha(a) + r(f(a) - \varepsilon)$ d'où $r > 0$, donc

$$\forall x \in E, (-\alpha/r).x - f(x) < (-\alpha/r).a - (f(a) - \varepsilon)$$

ainsi

$$f^*(-\alpha/r) \leq (-\alpha/r).a - (f(a) - \varepsilon) \text{ d'où } f(a) - \varepsilon \leq (-\alpha/r).a - f^*(-\alpha/r).$$

L'inégalité canonique permet de conclure.

(4.7) THEOREME - Soient E un espace localement convexe tonnelé, f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement sur $\text{Rad}(f)$ et $a \in \text{Rad}(f)$; si

$(\alpha_n) \in E'$ et $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) - f^*(\alpha_n)$, il existe que (α_n) est faiblement de Cauchy, alors f est dérivable en a .

En effet :

d'après le lemme (4.6), E' admet une suite (α_n) vérifiant

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) - f^*(\alpha_n).$$

Cette suite est donc faiblement de Cauchy ; or d'après le lemme (4.5) le polaire de $\{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$ absorbe E ; comme E est tonnelé, ce polaire est donc un voisinage de l'origine ; en conséquence le bipolaire est faiblement complet, donc la suite (α_n) admet une limite faible $\alpha \in E'$.

Or pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in E$

comme $a \in \text{Rad}(f)$, d'après la proposition (0.2) il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$, $(a+x/n) \in \text{Rad}(f)$ donc d'après le lemme (4.6) il existe $\beta_n \in E'$ tel que $f(a+x/n) + f^*(\beta_n) - \beta_n(a+x/n) \leq \varepsilon/2n$;

étant convexe f est hémicontinue sur $\text{Rad}(f)$ d'où

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a+x/n) \in \mathbb{R}$$

donc la suite $(\beta_n(x))$ est majorée puisque

$$\begin{aligned} (1/m - 1/n) \beta_n(x) &= \beta_n(a+x/m) - \beta_n(a+x/n) \\ &\leq f(a+x/m) + f^*(\beta_n) - f^*(\beta_n) - f(a+x/n) + \varepsilon/2n \end{aligned}$$

puis $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(a) - f^*(\beta_n)$ puisque

$$0 \leq f(a) + f^*(\beta_n) - \beta_n(a) \leq f(a) - f(a+x/n) + \beta_n(x)/n + \varepsilon/2n$$

la suite mixée des α_n et des β_n est donc par hypothèse faiblement de Cauchy ; en conséquence α est également limite faible de (β_n) ; en particulier il existe $p \geq m$ tel que $\beta_p(x) - \alpha(x) \leq \varepsilon/2$ d'où

$$\begin{aligned} f(a+x/p) - f(a) - \alpha(x)/p &\leq \varepsilon/2p + \beta_p(x)/p + \beta_p(a) - f^*(\beta_p) - f(a) - \alpha(x)/p \\ &\leq \varepsilon/2p + (\beta_p(x) - \alpha(x))/p \\ &\leq \varepsilon/p \end{aligned}$$

La proposition (0.3) permet de conclure que α est la dérivée de f en a .

(4.8) Remarque : de façon analogue on peut prouver que :

soient E un espace localement convexe, f une fonction convexe de E dans $]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement sur $\text{Rad}(f)$ et $a \in \text{Rad}(f)$, si $((\alpha_n) \in E'^{\mathbb{N}}$ et $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) - f^*(\alpha_n)) \Rightarrow (\alpha_n)$ converge faiblement alors f est dérivable en a .

(4.9) Corollaire.- Soient E localement convexe, f convexe positivement homogène de E dans $]-\infty, +\infty]$, A la partie $\{\alpha \in E' ; \alpha \leq f\}$ et $a \in \text{Rad}(f)$; si f est semi-continue inférieurement sur $\text{Rad}(f)$, alors sont équivalentes :

(4.9.0) f est dérivable en a

(4.9.1) $((\alpha_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a)) \Rightarrow (\alpha_n)$ converge faiblement.

En effet :

si f est dérivable en a , comme pour tout $\alpha \in A$, $f^*(\alpha) = 0$

$((\alpha_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a))$ implique

$(\alpha_n) \in E'^{\mathbb{N}}$ et $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) - f^*(\alpha_n)$

et d'après la proposition (4.2), $f'(a)$ est limite faible de la suite (α_n) .

Réciproquement si (4.9.1) est vérifiée, alors pour toute suite (α_n) dans E' vérifiant $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a) - f^*(\alpha_n)$, comme pour tout $\alpha \in E' \setminus A$, $f^*(\alpha) = +\infty$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m$, $\alpha_n \in A$ d'où $f^*(\alpha_n) = 0$ donc $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(a)$; en conséquence (α_n) converge faiblement et la remarque (4.8) permet de conclure.

(4.10) THEOREME.- Soient E un espace localement convexe, E'' le dual de E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E , f une fonction de E dans $]-\infty, +\infty]$ non partout infinie et $\alpha \in \text{Rad}(f^*)$; si
 $((x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f^*(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) - f(x_n))$ implique que (x_n) est faiblement de Cauchy, alors f^* est dérivable en α .

En effet :

par définition E admet une suite (x_n) vérifiant $f^*(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) - f(x_n)$; cette suite est donc faiblement de Cauchy.

E' étant tonnelé pour la topologie de la convergence bornée, le lemme (4.5)

puis la proposition (0.3) permettent comme en (4.7) de conclure que (x_n)

converge faiblement vers un élément de E'' qui est la dérivée de f^* en α .

CHAPITRE 5

NORMES DERIVABLES UNIFORMEMENT.

On suppose E normé.

(5.0) Remarque : pour tous u et $v \in E$

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u+v\|^2 = (\|u\| - \|v\|)^2 + (\|u\| + \|v\| + \|u+v\|)(\|u\| + \|v\| - \|u+v\|).$$

(5.1) Définition.- La norme de E est dérivable uniformément si :

$$\forall x \in E \text{ et } \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall u \in S, \|u+rx\| + \|u-rx\| < 2 + \varepsilon r.$$

(5.2) Proposition.- Cette définition équivaut à :

$$\forall x \in E \text{ et } \varepsilon > 0, \exists r > 0 : \forall u \in S \text{ et } t \in]0, r]$$

$$\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2 < 2 + \varepsilon t.$$

En effet : pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$

si la norme est dérivable uniformément, alors d'après la remarque (4.0)

il existe $r \in]0, \min\{\varepsilon/4\|x\|^2, 1/\|x\|\}]$ tel que pour tout $u \in S$

$$\forall t \in]0, r], \|u+tx\| + \|u-tx\| - 2\|u\| < t \varepsilon/6 ;$$

donc pour tous $u \in S$ et $t \in]0, r]$, d'après la remarque (5.0)

$$\begin{aligned} 2(\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2 - 2) &= 2(\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2) - \|2u\|^2 \\ &< (\|u+tx\| - \|u-tx\|)^2 + (\|u+tx\| + \|u-tx\| + \|2u\|) t \varepsilon/6 \end{aligned}$$

d'où par inégalité triangulaire

$$\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2 - 2 < (\|2tx\|^2 + (4\|u\| + 2\|tx\|) t \varepsilon/6)/2$$

$$\leq (4tr\|x\|^2 + (4+2r\|x\|) t \varepsilon/6)/2$$

$$\leq t(\varepsilon + (4+2)\varepsilon/6)/2 = \varepsilon t.$$

Réciproquement s'il existe $r > 0$ tel que pour tous $u \in S$ et $t \in]0, r]$

$$\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2 - 2 < \varepsilon t ,$$

alors pour tous $u \in S$ et $t \in]0, r]$, d'après la remarque (5.0)

$$\begin{aligned} \|u+tx\| + \|u-tx\| - 2 &= \|u+tx\| + \|u-tx\| - \|2u\| \\ &\leq \frac{2(\|u+tx\|^2 + \|u-tx\|^2) - \|2u\|^2}{\|u+tx\| + \|u-tx\| + 2\|u\|} < \frac{2\epsilon t}{2} = \epsilon t. \end{aligned}$$

(5.3) THEOREME.- Soient E_1 et E_2 deux espaces normés ; si leurs normes ℓ_1 et ℓ_2 sont dérivables uniformément, alors il en est de même de la norme

$$(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \rightarrow \sqrt{\ell_1^2(x_1) + \ell_2^2(x_2)} \in [0, \infty[.$$

En effet :

considérons $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\epsilon > 0$; d'après la proposition (5.2),

pour $i = 1$ puis 2 il existe $r_i > 0$ tel que pour tout $u \in E_i \setminus \{0\}$

$$\forall t \in]0, r_i], \ell_i^2\left(\frac{u}{\ell_i(u)} + tx_i\right) + \ell_i^2\left(\frac{u}{\ell_i(u)} - tx_i\right) < 2 + t\epsilon/2$$

d'où

$$\forall t \in]0, r_i \ell_i(u)], \ell_i^2(u+tx_i) + \ell_i^2(u-tx_i) < 2\ell_i^2(u) + \epsilon t \ell_i(u)/2.$$

Donc pour tout $t \in]0, \min\left\{\frac{\epsilon}{8\ell_2^2(x_1)}, \frac{\epsilon}{8\ell_2^2(x_2)}, \frac{\epsilon r_1}{16\ell_1(x_1)}, \frac{\epsilon r_2}{16\ell_2(x_2)}\right\}]$ et

pour tout $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $1 = \ell_1^2(u_1) + \ell_2^2(u_2)$

ou bien $\ell_i(u_i) < \epsilon/16\ell_i(x_i)$ d'où par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \ell_i^2(u_i+tx_i) + \ell_i^2(u_i-tx_i) &\leq 2(\ell_i(u_i) + t\ell_i(x_i))^2 \\ &= 2\ell_i^2(u_i) + 2t(2\ell_i(u_i)\ell_i(x_i) + t\ell_i^2(x_i)) \\ &< 2\ell_i^2(u_i) + 2t(2\epsilon/16 + \epsilon/8) = 2\ell_i^2(u_i) + t\epsilon/2 \end{aligned}$$

ou bien

$$\ell_i(u_i) \geq \frac{\epsilon}{16\ell_i(x_i)}$$

d'où

$$t \leq \frac{\epsilon r_i}{16\ell_i(x_i)} \leq r_i \ell_i(u_i)$$

donc

$$\ell_i^2(u_i+tx_i) + \ell_i^2(u_i-tx_i) < 2\ell_i^2(u_i) + t\epsilon\ell_i(u_i)/2 \leq 2\ell_i^2(u_i) + t\epsilon/2$$

et finalement dans tous les cas

$$\begin{aligned} & \ell_1^2(u_1 + tx_1) + \ell_2^2(u_2 + tx_2) + \ell_1^2(u_1 - tx_1) + \ell_2^2(u_2 - tx_2) \\ & < 2\ell_1^2(u_1) + t\varepsilon/2 + 2\ell_2^2(u_2) + t\varepsilon/2 = 2 + \varepsilon t . \end{aligned}$$

La proposition (5.2) permet de conclure.

(5.4) Proposition.- L'uniforme dérivabilité de la norme de E équivaut à

$$\forall x \in E \text{ et } \varepsilon > 0, \exists r > 0 : ((\alpha \text{ et } \beta \in S', \|\alpha + \beta\| > 2 - r) \Rightarrow (\alpha - \beta).x < \varepsilon).$$

En effet :

pour tous $x \in E \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$, s'il existe $s > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in S', \|\alpha + \beta\| > 2 - s) \Rightarrow (\alpha - \beta).x < \varepsilon/2 ,$$

alors posant $r = \frac{s}{4\|x\|}$ et $\varepsilon_1 = \min\{\frac{s}{4}, \frac{\varepsilon r}{4}\}$, pour tout $u \in S$, il existe

α et $\beta \in S'$ vérifiant

$$\alpha(u + rx) > \|u + rx\| - \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \beta(u - rx) > \|u - rx\| - \varepsilon_1$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\| & \geq (\alpha + \beta).u > \|u + rx\| + \|u - rx\| - 2\varepsilon_1 - \alpha(rx) - \beta(-rx) \\ & \geq \|2u\| - 2s/4 - r\|x\| - r\|x\| = 2 - s \end{aligned}$$

donc $(\alpha - \beta).x < \varepsilon/2$ d'où

$$\begin{aligned} \|u + rx\| + \|u - rx\| & < \alpha(u) + \beta(u) + r(\alpha - \beta).x + 2\varepsilon_1 \\ & \leq 1 + 1 + r\varepsilon/2 + 2\varepsilon r/4 = 2 + \varepsilon r . \end{aligned}$$

Réciproquement si la norme de E est dérivable uniformément, alors pour

tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $s > 0$ tel que pour tout $u \in S$

$$\|u + sx\| + \|u - sx\| \leq 2 + \varepsilon s/2$$

puis pour tous α et $\beta \in B'$ vérifiant $\|\alpha + \beta\| > 2 - \varepsilon s/2$, il existe

$u \in S$ tel que $(\alpha + \beta).u > 2 - \varepsilon s/2$ d'où

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \beta) \cdot x &= (\alpha(u+sx) + \beta(u-sx))/s - (\alpha + \beta) \cdot u/s \\
 &< (\|u+sx\| + \|u-sx\|)/s - (2-\varepsilon s/2)/s \\
 &\leq (2+\varepsilon s/2)/s - (2-\varepsilon s/2)/s = \varepsilon
 \end{aligned}$$

(5.5) Remarque : la norme duale est dite alors convexe faiblement uniformément.

(5.6) Lemme.- Soient $r \in]0,2]$, u et $v \in E$; si

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u+v\|^2 < r^2 \|u\|^2 / 4 ,$$

alors u et $v \neq 0$ puis

$$\|u\| + \|v\| - \|u+v\| < r \|u\| , \quad \left| 1 - \frac{\|v\|}{\|u\|} \right| < \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| > 2-r .$$

En effet :

$u \neq 0$ est trivial et d'après la remarque (5.0)

$$(\|u\| - \|v\|)^2 \leq 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u+v\|^2 < r^2 \|u\|^2 / 4 \quad \text{d'où} \quad \left| \|u\| - \|v\| \right| < r \|u\| / 2$$

$$\text{donc} \quad \left| 1 - \frac{\|v\|}{\|u\|} \right| < \frac{r}{2} \quad \text{d'où} \quad 0 \leq (1 - \frac{r}{2}) \|u\| < \|v\| < (1 + \frac{r}{2}) \|u\| .$$

En conséquence

$$\|u+v\|^2 > 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - r^2 \|u\|^2 / 4 > \|u\|^2 (2 + 2(1-r/2)^2 - r^2/4) = (2-r/2)^2 \|u\|^2$$

$$\text{donc} \quad \|u+v\| > (2-r/2) \|u\| \quad \text{d'où}$$

$$\|u\| + \|v\| - \|u+v\| < \|u\| (1 + 1 + r/2 - (2-r/2)) = r \|u\|$$

et par inégalité triangulaire

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| \geq \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|u\|} \right\| - \left\| \frac{v}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| > (2-r/2) - r/2 = 2-r .$$

(5.7) Proposition.- Si pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in S', \quad 4 - \|\alpha + \beta\|^2 < r) \Rightarrow (\alpha - \beta) \cdot x < \varepsilon$$

alors la norme de E est dérivable uniformément. Réciproquement si cette

norme est dérivable uniformément, alors pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ il

existe $r > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in E', 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2 - \|\alpha+\beta\|^2 < r \|\alpha\|^2) \Rightarrow (\alpha-\beta).x < \varepsilon \|\alpha\|.$$

En effet : pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$

s'il existe $s > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in S', 4 - \|\alpha+\beta\|^2 < s) \Rightarrow (\alpha-\beta).x < \varepsilon$$

alors pour tous α et $\beta \in S'$ vérifiant $\|\alpha+\beta\| > 2 - s/4$

$$4 - \|\alpha+\beta\|^2 = (2 + \|\alpha+\beta\|)(2 - \|\alpha+\beta\|) < 4 s/4 = s$$

d'où

$$(\alpha-\beta).x < \varepsilon$$

et la norme est dérivable uniformément d'après la proposition (5.4).

Réciproquement si la norme de E est dérivable uniformément, alors d'après

la même proposition (5.4) il existe $s > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in S', \|\alpha+\beta\| > 2-s) \Rightarrow (\alpha-\beta).x < \varepsilon/2 ;$$

posons $r = \min\{1, s^2/4, \varepsilon^2/4 \|x\|^2\} > 0$; d'après le lemme (5.6) pour tous

α et $\beta \in E'$ vérifiant $2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2 - \|\alpha+\beta\|^2 < r\|\alpha\|^2$

comme $r = (2\sqrt{r})^2/4$

$$|1 - \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}| < \frac{2\sqrt{r}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \quad \text{et} \quad \|\frac{\alpha}{\|\alpha\|} + \frac{\beta}{\|\beta\|}\| > 2 - 2\sqrt{r} \geq 2-s$$

d'où $(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} - \frac{\beta}{\|\beta\|}).x < \varepsilon/2$ puis

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta).x &= \|\alpha\|(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} - \frac{\beta}{\|\beta\|}).x + \|\alpha\|(\frac{\beta}{\|\beta\|} - \frac{\beta}{\|\alpha\|}).x \\ &\leq \|\alpha\| \varepsilon/2 + \|\alpha\| \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \|x\| = \varepsilon \|\alpha\|. \end{aligned}$$

(5.8) Proposition.— Soient ℓ_1 et ℓ_2 des normes équivalentes sur E , λ_1 et λ_2 les normes duales ; si $\ell_1 \leq \ell_2$, alors il existe $s \in]0, \infty[$ et une norme ℓ de duale λ vérifiant : $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$, u et $v \in E$,

α et $\beta \in E'$

$$2(\ell^2(u) + \ell^2(v)) - \ell^2(u+v) \geq 2^{-n}(2\ell_2^2(u) + 2\ell_2^2(v) - \ell_2^2(u+v) - 2^{-n}s(\ell_2^2(u) + \ell_2^2(v)))$$

$$2(\lambda^2(\alpha) + \lambda^2(\beta)) - \lambda^2(\alpha+\beta) \geq 2^{-n}(2\lambda_1^2(\alpha) + 2\lambda_1^2(\beta) - \lambda_1^2(\alpha+\beta) - 2^{-n}s(\lambda_1^2(\alpha) + \lambda_1^2(\beta)))$$

Cf. [A'], page 229, theorem 1.

(5.9) Proposition.- Soient $s \in]0, \infty[$, ℓ_1 une norme équivalente à ℓ et λ_1

sa norme duale ; si pour tous $n \in \mathbb{N}$, α et $\beta \in S'$

$$4 - \lambda^2(\alpha+\beta) \geq 2^{-n}(2\lambda_1^2(\alpha) + 2\lambda_1^2(\beta) - \lambda_1^2(\alpha+\beta) - 2^{-n}s(\lambda_1^2(\alpha) + \lambda_1^2(\beta)))$$

et si ℓ_1 est dérivable uniformément, alors ℓ aussi.

En effet :

comme ℓ_1 est équivalente à ℓ , il existe h et $k > 0$ vérifiant

$h\lambda \leq \lambda_1 \leq k\lambda$ et comme ℓ_1 est dérivable uniformément, d'après la pro-

position (5.7) pour tous $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$(\alpha \text{ et } \beta \in E' \text{ et } 2\lambda_1^2(\alpha) + 2\lambda_1^2(\beta) - \lambda_1^2(\alpha+\beta) < r\lambda_1^2(\alpha)) \Rightarrow (\alpha-\beta).x < \varepsilon\lambda_1(\alpha)/k.$$

Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \geq \frac{4k^2s}{rh^2}$; utilisant l'hypothèse, pour tous

α et $\beta \in S'$ vérifiant $4 - \lambda^2(\alpha+\beta) < 2^{-n} rh^2/2$

$$2\lambda_1^2(\alpha) + 2\lambda_1^2(\beta) - \lambda_1^2(\alpha+\beta) \leq 2^n(4 - \lambda^2(\alpha+\beta)) + 2^{-n}s(\lambda_1^2(\alpha) + \lambda_1^2(\beta))$$

$$< 2^n 2^{-n} rh^2/2 + 2^{-n}s(k^2 + k^2)$$

$$\leq rh^2/2 + rh^2/2$$

$$= rh^2 \lambda^2(\alpha) \leq r\lambda_1^2(\alpha)$$

donc $(\alpha-\beta).x < \varepsilon\lambda_1(\alpha)/k \leq \varepsilon\lambda(\alpha) = \varepsilon$.

La proposition (5.7) permet de conclure que ℓ est dérivable uniformément.

(5.10) Corollaire.- Si un espace vectoriel admet deux normes équivalentes, l'une dérivable uniformément, l'autre strictement (ou uniformément, ou localement

uniformément) convexe, alors il en admet une troisième équivalente déri-
vable uniformément et strictement (resp. uniformément, resp. localement
uniformément) convexe.

Démonstration analogue à [A'], page 231, theorem 3.

CARACTERISATIONS DES NORMES EUCLIDIENNES.

On suppose E normé

(6.0) Définition.- La norme de E est euclidienne si pour tous u et $v \in E$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(6.1) Remarque : pour prouver que la norme est dérivable ou euclidienne, d'après la proposition (4.1.2) et la définition (6.0) on peut supposer $2 = \dim E$; dans ce cas la norme est différentiable sur le complémentaire d'une réunion dénombrable de droites (cf. proposition 0.9).

(6.2) Proposition.- Si la norme de E est euclidienne, alors

$$(6.2.0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, u \text{ et } v \in S, \|u+tv\| = \|v+tu\|$$

$$(6.2.1) \quad (u \text{ et } v \in E, \|u+v\| = \|u-v\|) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|u+tv\| = \|u-tv\|$$

$$(6.2.2) \quad (a \text{ et } x \in E, \|a+x\| = \|a-x\|) \Rightarrow \|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}$$

$$(6.2.3) \quad (a \text{ et } x \in E, \|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}) \Rightarrow \|a+x\| = \|a-x\|$$

$$(6.2.4) \quad \forall a \in E, \{x \in E ; \forall t \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|x+ta\|\} \text{ est un sous-espace vectoriel.}$$

Cf. [D], page 115, paragraphe 3.

(6.3) Remarque : (6.2.1) équivaut à (6.2.0)

(6.4) Lemme.- La propriété (6.2.0) implique la dérivabilité de la norme.

En effet : supposons $2 = \dim E$,

d'après la remarque (6.1) la norme est dérivable sur au moins une droite D

origine exclue ; pour tout $x \in E \setminus D$, choisissons $a \in D$ tel que $\|a\| = \|x\|$

d'après l'hypothèse (6.2.0), pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|x+ta\| + \|x-ta\| - 2\|x\| = \|a+tx\| + \|a-tx\| - 2\|a\|$$

et pour tout $t \in [-1, +1]$

$$\|x+tx\| + \|x-tx\| - 2\|x\| = (1+t+1-t-2)\|x\| = 0$$

donc d'après la proposition (4.1.3) la norme est dérivable en x .

(6.5) THEOREME.- Soit E un espace normé ; si pour tous $t \in \mathbb{R}$, u et $v \in E$

$\|u+tv\| = \|v+tu\|$, alors la norme est euclidienne.

En effet :

par hypothèse, pour tous $t \in \mathbb{R}$, u et $v \in E \setminus \{0\}$,

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} + t \frac{u}{\|u\|} \right\| = \left\| \frac{u}{\|u\|} + t \frac{v}{\|v\|} \right\|$$

d'où

$$\ell(\|u\| v + t\|v\| u) = \ell(\|v\| u + t\|u\| v)$$

or cette fonction de $t \in \mathbb{R}$ est dérivable d'après le lemme (6.4) et admet

$$\ell'(\|u\| v) \cdot \|v\| u = \ell'(\|v\| u) \cdot \|u\| v$$

pour dérivée en 0 ; donc

$$\|v\| \ell'(v) \cdot u = \|u\| \ell'(u) \cdot v.$$

En conséquence pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, la fonction continue f

$$x \in E \rightarrow \|a+x\|^2 + \|a-x\|^2 - 2\|x\|^2 \in \mathbb{R}$$

admet en tout $x \in E \setminus \{-a, 0, +a\}$ une dérivée nulle, car pour tout

$u \in E \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot u &= 2\|a+x\| \ell'(a+x) \cdot u + 2\|a-x\| \ell'(a-x) \cdot u - 4\|x\| \ell'(x) \cdot u \\ &= 2\|u\| \ell'(u) \cdot (a+x+a-x-2x) = 0 ; \end{aligned}$$

donc d'après la proposition (0.7), f est constante sur E , égale à

$f(0) = 2\|a\|^2$. Ainsi la norme vérifie la formule du parallélogramme.

(6.6) Corollaire.- La propriété (6.2.2) implique que la norme est euclidienne.

En effet :

pour tous u et $v \in E \setminus \{0\}$ vérifiant $\|u+v\| = \|u-v\|$, pour tout $t \in \mathbb{R}$

posons $r = \frac{\|u+tv\|}{\|u-tv\|}$; immédiatement $u \neq tv$, donc $0 \leq r < \infty$; par hypo-

thèse $\|u\| \leq \|u + \frac{1-r}{1+r} tv\|$ d'où $(1+r)\|u\| \leq \|(1+r)u + (1-r)tv\|$ or

$$2\|u+tv\| = \|(1+r)u + (1-r)tv + (1-r)u + (1+r)tv\|$$

$$= 2\|ru - rtv\|$$

$$= \|(1+r)u + (1-r)tv - (1-r)u - (1+r)tv\|$$

donc par hypothèse encore

$$\begin{aligned} \|(1+r)u + (1-r)tv\| &\leq \|(1+r)u + (1-r)tv + \frac{r-1}{r+1}(1-r)u + \frac{r-1}{r+1}(1+r)tv\| \\ &= \left| 1+r - \frac{(1-r)^2}{1+r} \right| \|u\|. \end{aligned}$$

Finalement comme $u \neq 0$, $1+r \leq 1+r - \frac{(1-r)^2}{1+r}$ d'où $r = 1$ donc

$$\|u+tv\| = \|u-tv\|$$

et la remarque (6.3) permet de conclure.

(6.7) Corollaire. - Si (u et $v \in E$, $\|u\| = \|v\|$) $\Rightarrow \forall t > 0$, $\|u+v\| \leq \|tu+v/t\|$

alors la norme est euclidienne.

En effet :

pour tous a et $x \in E$ vérifiant $\|a+x\| = \|a-x\|$, pour tout $t \in]-1, +1[$

par hypothèse

$$\|2a\| \leq \|(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}})a + (\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \sqrt{\frac{1-t}{1+t}})x\|$$

donc

$$2\sqrt{(1-t)(1+t)}\|a\| \leq \|2a + 2tx\|$$

d'où

$$\|a+tx\| - \|a\| \geq (-1 + \sqrt{1-t^2})\|a\| = \frac{-t^2}{1+\sqrt{1-t^2}}\|a\| \geq -t^2\|a\|$$

or par convexité

$$\forall t > 0, 0 = \lim_{r \downarrow 0} (-r \|a\|) \leq \lim_{r \downarrow 0} (\|a+rx\| - \|a\|)/r \leq (\|a+tx\| - \|a\|)/t$$

$$\text{et } \forall t < 0, (\|a+tx\| - \|a\|)/t \leq \lim_{r \uparrow 0} (\|a+rx\| - \|a\|)/r \leq \lim_{r \uparrow 0} (-r \|a\|) = 0$$

donc $\|a\| = \min_{t \in \mathbb{R}} \|a+tx\|$ et le corollaire (6.6) permet de conclure.

(6.8) Remarque : la propriété (6.2.3) équivaut à :

$$(a \text{ et } x \in E, \|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|x+ta\| = \|x-ta\|.$$

Et pour tous $a \in E$, $\alpha \in \partial \ell(a)$ et $x \in \alpha^{-1}(0)$, $\alpha(a) = \|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}$

(6.9) Lemme.- La propriété (6.2.3) implique la dérivabilité de la norme.

En effet :

pour tous $u \in E$ et $v \in E \setminus \{0\}$, la fonction $\theta : t \in \mathbb{R} \rightarrow \|u+tv\| \in \mathbb{R}$

étant convexe, il existe $r \in [-\infty, +\infty]$ et $s \geq r$ tel que θ décroît

strictement sur $]-\infty, r]$, croît strictement sur $[s, +\infty[$, est constante et

minimum sur $[r, s]$; r et s sont finis puisque $+\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$, et comme

$$\|u+rv\| = \min_{t \in \mathbb{R}} \theta(r+(s-r)t) = \min\{\|u+rv+t(s-r)v\| ; t \in \mathbb{R}\}$$

par hypothèse

$$\|u+sv\| = \|u+rv+(s-r)v\| = \|u+rv-(s-r)v\| = \|u+(2r-s)v\|$$

donc $r \leq 2r-s$ d'où $s \leq r$ et $s = r$;

en conséquence θ est strictement décroissante sur $]-\infty, r]$ et croît

strictement sur $[r, +\infty[$; en particulier pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2 \geq \text{card } \theta^{-1}(t)$.

Donc pour tous $a \in E \setminus \{0\}$, α et $\beta \in \partial \ell(a)$ d'après la remarque (6.8)

pour tout $x \in \beta^{-1}(0)$

$$\left\| x + \frac{2\alpha(x)}{\|a\|} a \right\| = \left\| x - \frac{2\alpha(x)}{\|a\|} a \right\|$$

et

$$\left\| x - \frac{\alpha(x)}{\|a\|} a + \frac{\alpha(x)}{\|a\|} a \right\| = \left\| x - \frac{\alpha(x)}{\|a\|} a - \frac{\alpha(x)}{\|a\|} a \right\| ,$$

puisque $\alpha(x - \frac{\alpha(x)}{\|a\|} a) = 0$; donc

$$\left\| x + \frac{2\alpha(x)}{\|a\|} a \right\| = \|x\| = \left\| x - \frac{2\alpha(x)}{\|a\|} a \right\|$$

et d'après le début de ce lemme $\alpha(x) = 0$ d'où $\beta = \alpha$ puisque

$$\beta(a) = \|a\| = \alpha(a) \neq 0 .$$

La proposition (4.1.1) permet de conclure.

(6.10) THEOREME.- Soit E un espace normé ; si

$$(a \text{ et } x \in E, \|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}) \implies \|a+x\| = \|a-x\|$$

alors la norme est euclidienne.

En effet :

pour tous u et $v \in E \setminus \{0\}$, $0 \neq 2\|v\| = 2\ell'(v) \cdot v = \ell'(v) \cdot (u+v) - \ell'(v) \cdot (u-v)$

donc $\ell'(v) \cdot (u+v)$ ou $\ell'(v) \cdot (u-v)$ est non nul ; supposons $\ell'(v) \cdot (u+v) \neq 0$

et posons $r = \frac{\ell'(v) \cdot (u+v)}{\|v\|}$; de $\ell'(v) \cdot (u+v-rv) = \ell'(v) \cdot (u+v) - r\|v\| = 0$

on déduit

$$\|v\| = \min\{\|v+t(u+v-rv)\| ; t \in \mathbb{R}\}$$

d'où d'après la remarque (6.8)

$$\|u+(1-2r)v\| = \|u+v-rv-rv\| = \|u+v-rv+rv\| = \|u+v\|.$$

Si $\|u-v\| = \|u+v\|$, alors d'après le début du lemme (6.9), $(1-2r) \in \{-1, +1\}$

d'où $r \in \{0, 1\}$ d'où $r = 1$ donc

$$\ell'(v) \cdot (u+v) = \|v\| = \ell'(v) \cdot v$$

d'où $\ell'(v) \cdot u = 0$ d'où $\|v\| = \min_{t \in \mathbb{R}} \|v+tu\|$ et d'après la remarque (6.8)

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|u+tv\| = \|u-tv\|$.

La remarque (6.3) permet de conclure.

(6.11) THEOREME.- Soit E un espace normé ; si $2 < \dim E$ et si pour tout $a \in E$ la partie $\{x \in E ; \forall t \in \mathbb{R}, \|x\| \leq \|x+ta\|\}$ est un sous-espace vectoriel, alors la norme est euclidienne.

En effet : soit $a \in E \setminus \{0\}$

pour tout $x \in E$ tel que $\|a\| = \min\{\|a+tx\| ; t \in \mathbb{R}\}$

comme $(\|a\|B) \cap (a+\mathbb{R}x) = \emptyset$ il existe d'après le théorème de Hahn-Banach

et puisque $2 < \dim E$, un plan E_1 d'appui à S en $a/\|a\|$ contenant x .

Ou bien $\|a+x\| = \|a\| = \|a-x\|$, ou bien par exemple $\|a+x\| > \|a\|$ et dans E_1

la partie $\{u \in E_1 ; \|a+u\| < \|a+x\|\}$ bornée ouverte convexe contient l'ori-

gine ; or sa frontière est $A = \{u \in E_1 ; \|a+u\| = \|a+x\|\}$ car pour tout $u \in A$,

la fonction convexe $t \in \mathbb{R} \rightarrow \|a+tu\| \in \mathbb{R}$ qui vaut $\|a\|$ en 0, croît stric-

tement au voisinage de 1 puisque $\|a+u\| > \|a\|$.

D'après la proposition (0.9), il existe donc $r \in \mathbb{R}$, une base $\{u,v\}$ de E_1

et des fonctions θ convexe et θ_1 concave de $[r,r+1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\theta(r) = \theta_1(r), \theta(r+1) = \theta_1(r+1) \text{ et}$$

$$A = \{tu+\theta(t)v ; t \in [r,r+1[\} \cup \{tu+\theta_1(t)v ; t \in]r,r+1] \} ;$$

or la fonction continue : $t \in [r,r+1] \rightarrow \|tu+\theta(t)v\| \in \mathbb{R}$ est dérivable sur le

complémentaire de l'ensemble dénombrable qu'est la réunion des points angu-

leux de θ avec l'image réciproque par $t \rightarrow tu+\theta(t)v$ des points de non

différentiabilité de $\ell|_{E_1}$ dans A ; et sur ce complémentaire la dérivée

$\ell'(tu+\theta(t)v).(u+\theta'(t)v)$ est nulle car :

$$\|a+tu+\theta(t)v\| = \min\{\|a+tu+\theta(t)v+s(u+\theta'(t)v)\| ; s \in \mathbb{R}\}$$

puisque $\ell(a+tu+\theta(t)v)$ étant constant, $\ell'(a+tu+\theta(t)v).(u+\theta'(t)v) = 0$

et $\|a\| = \min\{\|a+s(u+\theta'(t)v)\| ; s \in \mathbb{R}\}$ puisque $u+\theta'(t)v \in E_1$ donc

par hypothèse

$$\|tu+\theta(t)v\| = \min\{\|tu+\theta(t)v+s(u+\theta'(t)v)\| ; s \in \mathbb{R}\} .$$

Ainsi d'après la proposition (0.7), $\|tu+\theta(t)v\|$ est constante sur $[r, r+1]$;

de même avec θ_1 , donc la norme est constante sur A .

Or, comme $\|a-ox\| < \|a+x\|$ et $+\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \|a-tx\|$, d'après le théorème des

valeurs intermédiaires il existe $t > 0$ tel que $\|a-tx\| = \|a+x\|$;

donc $\| -tx \| = \| x \|$ d'où $t = 1$ puisque $x \neq 0$ d'où $\|a+x\| = \|a-x\|$.

Le théorème (6.10) permet de conclure.

(6.12) Corollaire.- Si la norme est dérivable, si

$$(u \text{ et } v \in E \setminus \{0\}, \ell'(u).v = 0) \implies \ell'(v).u = 0$$

et si $2 < \dim E$, alors la norme est euclidienne.

CHAPITRE 7

QUATRE CONTRE EXEMPLES.

(7.0) $\ell^2(\mathbb{N})$ admet une fonction numérique f positivement homogène, infiniment différentiable (sauf en 0), telle que $f^{-1}([0,1])$ est un voisinage borné symétrique équilibré de l'origine dont l'enveloppe convexe définit une norme non dérivable sur au moins une droite.

En effet :

notons $\|\dots\|$ et (e_n) les norme et base canoniques de $\ell^2(\mathbb{N})$, puis

considérons les fonctions $h : x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \sum_{n \geq 2} x_n^2 \in [0, \infty[$

et $k : x \in \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \sum_{n \geq 2} (1 - 1/n) x_n^2 \in [0, \infty[$.

Choisissons $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta|_{]-\infty, 1/5]} = 0$ et $\theta|_{[1/4, +\infty[} = 1$

et définissons la fonction g de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $[1, 6[$ par $g|_{h^{-1}(0)} = 1$ et

quand $h(x) \neq 0$,

$$g(x) = \left(1 + \frac{k(x)}{h(x)} \theta\left(\frac{h(x)}{\|x\|^2}\right)\right) \left(1 + \frac{2h(x)}{x_2^2 + h(x)} \theta\left(\frac{h(x)}{\|x\|^2}\right)\right);$$

g est infiniment différentiable sur l'ouvert $\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) ; 5h(x) < \|x\|^2\}$

où elle reste constante et sur l'ouvert $h^{-1}(]0, \infty[)$ donc sur leur réunion

$\ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$.

Posons $s = \max\{2(1+2t)(1-t) ; t \in [0, 1]\} = 2(1+1/2)(1-1/4) = (3/2)^2$;

pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$, ou bien $x_2 = 0$ d'où $\frac{g(x)x_2^2}{\|x\|^2} = 0 < s$ ou bien

$x_2 \neq 0$ et

$$\frac{g(x)x_2^2}{\|x\|^2} \leq g(x) \frac{x_2^2}{x_2^2 + h(x)} < 2\left(1 + 2 \frac{h(x)}{x_2^2 + h(x)}\right) \left(1 - \frac{h(x)}{x_2^2 + h(x)}\right) \leq s.$$

Définissons la fonction g_1 de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $[0,1]$ par $g(0) = 1$ et quand $x \neq 0$

$$g_1(x) = (1 - \theta) \cdot \left(\frac{s \|x\|^2 g(x) x_1^2}{(s \|x\|^2 - g(x) x_2^2)^2} \right) ;$$

g_1 est infiniment différentiable sur $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$.

Enfin posons $f(x) = \|x\| (1 + (g(x) - 1) g_1(x))^{-1/2}$; trivialement f est infiniment différentiable sur $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$, positivement homogène, symétrique et $B \subset f^{-1}(]-\infty, 1]) \subset B(0, \sqrt{6})$ puisque $1 \leq 1 + (g-1)g_1 \leq 1 + (6-1)1 = 6$.

Or pour tout $n \geq 3$, posons $u_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_n$ et $v_n = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_n \in \ell^2(\mathbb{N})$;

$$g_1(u_n) = (1-\theta) \cdot (0) = 1 = g_1(v_n)$$

et

$$g(u_n) = (1 + (1-1/n) \theta(1/4))(1 + (1/2)\theta(1/4)) = (2-1/n)3/2 = g(v_n)$$

donc $f(\sqrt{(2-1/n)3/2} u_n) = \|u_n\| = 1 = f(\sqrt{(2-1/n)3/2} v_n)$; en particulier

l'enveloppe convexe de $f^{-1}(]-\infty, 1])$ contient

$$\sqrt{(2-1/n)3/2} \frac{u_n + v_n}{2} = 3/2 \sqrt{\frac{2-1/n}{2}} e_2 ,$$

donc

$$\frac{3}{2} e_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2-1/n}{2}} e_2$$

appartient à la boule unité associée.

Mais pour tout $x \in f^{-1}(]-\infty, 1])$,

ou bien $g_1(x) = 0$ donc $\|x\| = f(x) \leq 1$ d'où $(|x_1| + |x_2|)^2 \leq 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 2 < (3/2)$

ou bien $g_1(x) > 0$ donc $\frac{s \|x\|^2 g(x) x_1^2}{(s \|x\|^2 - g(x) x_2^2)^2} < \frac{1}{4}$ d'où

$$\frac{g(x)}{\|x\|^2} x_1^2 < \left(s - \frac{g(x)}{\|x\|^2} x_2^2 \right)^2 / 4s , \text{ or}$$

$$\|x\|^2 = f^2(x) (1 + (g(x)-1)g_1(x)) \leq 1(1 + (g(x)-1)1) = g(x)$$

donc

$$|x_1| < \frac{s - \frac{g(x)}{\|x\|^2} x_2^2}{2\sqrt{s}} \leq \frac{s - \frac{g(x)}{\|x\|^2} x_2^2}{\sqrt{s} + \frac{\sqrt{g(x)}}{\|x\|} |x_2|} = \sqrt{s} - \frac{\sqrt{g(x)}}{\|x\|} |x_2| \leq \frac{3}{2} - |x_2| .$$

Finalement $f^{-1}([-\infty, 1]) \subset \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) ; |x_1| + |x_2| < 3/2\}$; en conséquence, la norme associée à $\bar{f}^{-1}([-\infty, 1])$ admet $3e_2/2$ comme point anguleux.

(7.1) Dans $\mathbb{R}^3$ il existe une jauge dérivable continue symétrique équivalente aux normes et un convexe compact ne contenant pas l'origine tel que l'entier n du corollaire (1.6) ne puisse valoir 1.

En effet :

choisissons $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta(1) = 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta|_{\mathbb{R} \setminus]0,2[} = 0$;

notons $\|\dots\|$ la norme euclidienne, posons $a = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ et définissons

la fonction g de $\mathbb{R}^3$ dans $[0,1/2]$ par $g(x) = 0$ quand $x_2 = 0$ et

sinon

$$g(x) = \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\|x\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\|x\|^2} \right) \theta\left(\frac{x_1^2 \|x\|^2}{x_2^4}\right) ;$$

g est infiniment différentiable sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 \|x\|^2 > 2 x_2^4\}$

où elle reste nulle et sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^3 ; x_2 \neq 0\}$ donc sur leur

réunion $\mathbb{R}^3 \setminus \{a\}$;

g est continue en a , car

$$g(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\|x\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\|x\|^2} \right)$$

et dérivable en a , avec $g'(a) = 0$, car pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

ou bien $x_1 x_2 = 0$ d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(a+tx) = 0$

ou bien $x_1 x_2 \neq 0$ donc pour $|t| \leq \min \left\{ \frac{1}{2|x_3|}, \frac{x_1}{2\sqrt{2}x_2} \right\}$,

$$\|a+tx\|^2 \geq (1+tx_3)^2 \geq (1/2)^2$$

d'où

$$t^2 x_1^2 \|a+tx\|^2 \geq 2 t^4 x_2^4$$

et $g(a+tx) = 0$.

Notons f la fonction $x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (1 + g(x)) \|x\| \in [0, \infty[$ elle vérifie

trivialement les conditions de l'énoncé ; en particulier

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]-\infty, r[) \subset B(0, r).$$

Notons K le convexe compact $\{x \in \mathbb{R}^3 ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_3 = 1\}$ et α la projection : $x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x_3 \in \mathbb{R}$; immédiatement $f'(-a) = \ell'(-a) = -\alpha \in S'$.

Pour tout $r \leq 1$, $K \not\subset f^{-1}([- \infty, r[) + ra$ car $K \not\subset B(ra, r)$

et pour tout $r > 1$ il existe $t > 0$ tel que

$$t^2 + t \sqrt{1/r^2 + (1-1/r)^2} = 1/r^2 ;$$

posons $s = (t \sqrt{1/r^2 + (1-1/r)^2})^{1/2} \in]0, \infty[$ et $x = (t, s, 1/r) \in \mathbb{R}^3$

comme $t^2 + s^2 = 1/r^2$, $\|x-a\|^2 = 1/r^2 + (1-1/r)^2$ d'où $t^2 \|x-a\|^2 = s^4$

puis

$$f(a-x) = (1 + \frac{1/r}{\|x-a\|} - \frac{1/r^2}{2\|x-a\|^2}) \|x-a\| = \|x-a\| - \frac{1/r^2}{2\|x-a\|} + \frac{1}{r} \geq 1$$

car $\|x-a\| - \frac{1/r^2}{2\|x-a\|} \geq 1 - \frac{1}{r}$ puisque $\|x-a\|^2 \geq \frac{1}{2r^2}$ d'où $\|x-a\| - \frac{1/r^2}{2\|x-a\|} \geq 0$

et que $(\|x-a\| - \frac{1/r^2}{2\|x-a\|})^2 \geq \|x-a\|^2 - \frac{1}{r^2} = (1 - \frac{1}{r})^2$;

finalement $rx \in K \setminus (f^{-1}([- \infty, r[) + ra)$ donc $K \not\subset f^{-1}([- \infty, r[) + ra$.

Remarque : quand la jauge est différentiable la conclusion de (1.6) vaut

avec $n = 1$; mais la réciproque est fautive en dimension supérieure à 2.

(7.2) $\mathbb{R}^2$ admet deux fonctions numériques infiniment différentiables f et g
dont les dérivées partout colinéaires ne s'annulent pas, et deux points
 u et v vérifiant $f(u) = f(v)$ mais $g(u) \neq g(v)$.

En effet :

notons ℓ la norme euclidienne, α la projection : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x_1 \in \mathbb{R}$
et choisissons $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta|_{]-\infty, 1]} = 0$ et $\theta'|_{]1, \infty[} > 0$.

Définissons la fonction h de $\mathbb{R}^2$ dans $[0, \infty[$ par $h|_{\alpha^{-1}(]-\infty, 0])} = 0$

et quand $\alpha(x) > 0$, $h(x) = \theta \circ \ell(x)$; h est infiniment différentiable sur

l'ouvert $B(0, 1)$ où elle reste nulle et sur l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^2 ; \alpha(x) \neq 0\}$

donc aussi sur $]-1, +1[\times]0, 1[$ qui est inclus dans leur réunion ; enfin

pour tout $x \in]-1, +1[\times]0, 1[$ il existe $t > 0$ tel que $h'(x) = t\ell'(x)$.

Notons k le difféomorphisme :

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \frac{x_2}{2\sqrt{1+x_2^2}} + \frac{1}{2} \right) \in]-1, +1[\times]0, 1[$$

et posons $f = \ell \circ k$, $g = (\ell + h) \circ k$, $u = h^{-1}(-3/4, 3/4)$ et $v = (3/4, 3/4)$;

les conditions de l'énoncé sont vérifiées trivialement.

Remarque : cet exemple dissuade de simplifier la démonstration (6.11).

(7.3) Il existe un espace normé de norme infiniment différentiable tel que la norme de son complété n'est pas dérivable.

En effet :

notons ℓ la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par la convexe contenant l'origine intersection des disques de rayon $\sqrt{2}$ et de centres $(0, -1)$ et $(0, +1)$; elle est croissante sur $\mathbb{R}_+^2$ et infiniment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$; la norme associée par la proposition (0.10) sur $\ell^2(\mathbb{N}) = \mathbb{R} \times \ell^2(\mathbb{N} \setminus \{1\})$ est donc équivalente à la norme euclidienne, infiniment différentiable sur $\ell^2(\mathbb{N}) \setminus (a)$ où a désigne le premier vecteur de base canonique, mais pas dérivable en a .

Par contre, sa restriction à tout hyperplan non fermé de $\ell^2(\mathbb{N})$ ne contenant pas a , est infiniment différentiable.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] AMIR (D.) and LINDENSTRAUSS (J.).- The structure of weakly compact sets in Banach spaces ; *Annals of Math.*, t. 88, 1968, p. 35 à 46.
- [A'] ASPLUND (Edgar).- Averaged norms ; *Israel Jour. of Math.*, t. 5, 1967, p. 227 à 233.
- [A''] ASPLUND (Edgar).- Fréchet differentiability of convex functions ; *Acta Math. Uppsala*, t. 121, 1968, p. 31 à 47.
- [B] BISHOP (E.) and PHELPS (R.).- The support functionals of a convex set, convexity, p. 27 à 35 ; Providence, *Amer. Math. Soc.*, 1963 (proc. of symposia in pure mathematics, 7).
- [B'] BONIC (R.) and FRAMPTON (J.).- Smooth functions on Banach manifolds ; *Jour. of Math. and Mech.*, t. 15, 1966, p. 877 à 898.
- [B''] BONIC (R.), FRAMPTON (J.) and TROMBA (A.).- Λ -manifolds ; *Jour. of Functional Analysis*, t. 3, 1969, p. 310 à 320.
- [C] CHOQUET (Gustave).-
- [C'] CUDIA (Dennis).- The geometry of Banach spaces, Smoothness ; *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 110, 1964, p. 284 à 314.
- [D] DAY (Mahlon).- Normed linear spaces, 2nd ed. ; Berlin, Springer-Verlag, 1962, (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Neue Folge 21).
- [F] FICKEN (Frederick).- Note on the existence of scalar products in normed linear spaces ; *Annals of Math.*, t. 45, 1944, p. 362 à 366.
- [J] JOÏCHI (J.T.).- More characterizations of inner product spaces ; *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 19, 1968, p. 1185-1186.
- [L] LANG (Serge).- Introduction to differentiable manifolds ; New-York, Interscience Publishers, 1962.
- [L'] LEDUC (Michel).- Jauges différentiables et partitions de l'unité ; *Séminaire Choquet*, t. 4, 1964-65, N° 12 (*Mathématica Séminosa* 1).
- [L''] LEDUC (Michel).- Fonctions dérivables ; *Séminaire Choquet*, t. 9, 1969-70 N° 9-10.
- [M] MOREAU (Jean-Jacques).- Sous différentiabilité ; *Proc. of the Colloquium on convexity*, Copenhagen, 1965, p. 185 à 201.

- [N] NACHBIN (Leopoldo).- Topology and order ; Princeton, Van Nostrand Company, 1965 (V.N. Mathematical studies 4).
- [P] PHELPS (Robert).- A representation theorem for bounded convex sets ; Proc. Amer. Math. Soc., t. 11, 1960, p. 976 à 983.
- [S] SCHAEFFER (Helmut).- Topological vector spaces, 2nd ed. ; New York, Macmillan, 1967.
- [S'] SMULIAN (V.L.).- On some geometrical properties of the unit sphere in the space of the type B ; Mat. Sbornik, t. 48 (6), 1939, p. 90 à 94.
- [W] WHITFIELD (J.H.).- Differentiable functions with bounded nonempty support on Banach spaces ; Bull. Amer. Math. Soc., t. 72, 1966, p. 145-146.
- [Z] ZIZLER (Vaclav).- Banach spaces with differentiable norms ; Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 9, 1968, p. 415 à 440.

Les références [D], [M] et surtout [Z] complètent utilement le sommaire.

TABLE DES CHAPITRES

Sommaire	page 1
Définitions, notations, rappels	4
Chapitre I	8
Chapitre II	13
Chapitre III	18
Dérivabilité des fonctions convexes conjuguées	23
Normes dérivables uniformément	29
Caractérisation des normes euclidiennes	36
Quatre contre-exemples	43
Bibliographie	50

